

有限要素法による高周波電磁界電子レンズの数値解析*

加藤和夫**, 大場敏朗***, 田島三之**, 松田基一**, 森戸 望**

Numerical Analysis of R-F Fields Electron Lens by Finite Element Method

Kazuo KATO, Toshiro OHBA, Miyuki TAJIMA, Jin-ichi MATSUDA,
Nozomu MORITO

The finite element program used for computing the rotationally symmetrical RF-fields is developed.

As the elements of the finite element matrix are stored in the form of skyline stored matrix, the required memories for the implementation of this program are rather small, and a computing time can be also reduced by about 1/5 computed with that of an ordinary finite element program.

The outline of this program is described. The example of the numerical analysis of the RF-fields electron lens are also shown.

1. ま え が き

高周波電磁界の数値計算法として、変分原理に基づく有限要素法を利用する手段がある¹⁾。有限要素法は、他の数値計算法と比較して、i) 計算領域の分割に自由度がある。ii) 境界の処理が容易である。iii) 計算手法に柔軟性があり、高精度の解が求まる。などの特長がある²⁾。その反面、計算領域が大きい場合やデータ点数が増えた場合には、大きな記憶容量が必要となり、計算時間が急激に長くなるなどの欠点がある。最近、カリフォルニア大学 Wilson の研究グループによって、有限要素法による伝熱解析プログラム“DOT”が開発された³⁾。“DOT”では、マトリックス解法部にスカイライン形の可変帯幅アルゴリズムを用いることにより、 unnecessary な成分はいっさい記憶せず、処理もしないことから、記憶容量の節約を図ると共に、従来の同種プログラムと比較して、計算時間が大巾に短縮されている。残念ながら、“DOT”はすでに述べたように、伝熱解析を目的としているため、波動方程式を解く高周波電磁界計算にはそのままでは応用できない。そこで、著者らは、“DOT”で用いられているマトリックス解法部を利用し、新たに回転対称系の高周波電磁界分布の数値計算を行なうための有限要素法プログラムを開発した。

ここでは、本プログラムの概略及び数値解析の際重要な問題となる境界条件の決定方法について述べる。本プ

ログラムは、任意の境界条件を持つ高周波電磁界とその固有周波数を反復法で self-consistent に解くことにより、演算の簡略化を図っている。つぎに、本プログラムを高周波電子レンズの収差補正計算に応用し、その光学特性例について述べる。本例では、従来の同種プログラムに比べて、演算速度が5倍程改善できた。

2. 有限要素法による高周波電磁界解析

2.1 高周波電磁界問題の定式化

高周波電磁界問題における波動方程式は、静電磁界問題の準調和方程式に時間項を加えたものであり、次式のように表わされる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \lambda^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \lambda^2 \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

$$\text{但し, } \lambda^2 = \omega^2 \epsilon \mu = \omega^2 / c^2$$

ここで、回転対称な電界について考えると、円筒座標系での電界の進行方向成分 E_z は、式(1)より、

$$\nabla^2 E_z + \lambda^2 E_z = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \lambda^2 E_z = 0 \quad (4)$$

ガラーキン法を用いて、

$$\begin{aligned} & \iiint_U N_i \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \lambda^2 E_z \right\} dV \\ &= 2\pi \iint_S N_i \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \lambda^2 E_z \right\} r dr dz \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 N_i は重み関数であり、近似解を定める形状

*原稿受付 昭和57年3月31日

**長岡技術科学大学(新潟県長岡市上富岡町字長峰1803-1)

***現在シャープ株式会社

関数に等しい。

式(5)の第1項は,

$$\begin{aligned} & \iint_S N_i \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \right\} r dr dz \\ &= \int_L \left[N_i \frac{\partial E_z}{\partial r} r \right]_A^B dz - \iint_S \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial E_z}{\partial r} r dr dz \quad (6) \end{aligned}$$

第2項は,

$$\begin{aligned} & \iint_S N_i \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} r dr dz \\ &= \int_L \left[N_i \frac{\partial E_z}{\partial z} \right]_C^D r dr - \iint_S \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial E_z}{\partial z} r dr dz \quad (7) \end{aligned}$$

第3項は,

$$\lambda^2 \iint_S N_i E_z r dr dz \quad (8)$$

と表わされる。

したがって, 式(6), (7), (8)より式(5)は次式となる。

$$\begin{aligned} & 2\pi \iint_S \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial E_z}{\partial z} - \lambda^2 N_i E_z \right) r dr dz \\ & - 2\pi \int_L \left[N_i \frac{\partial E_z}{\partial r} r \right]_A^B dz - 2\pi \int_L \left[N_i \frac{\partial E_z}{\partial z} \right]_C^D r dr = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

式(9)の第2項, 第3項は, 軸上及び外表面での積分である。軸に垂直な表面では, $(\partial E_z / \partial z) = 0$, 軸に平行な表面では, $E_z = 0$ である。このような場合, 第2項及び第3項は零となり, 式(9)は第1項のみ存在するだけとなる。要素の全節点パラメータに関して, マトリックス表示は, 静電界の場合³⁾と同様に,

$$([S]^e - \lambda^2 [M]^e) \{E_z\}^e = 0 \quad (10)$$

ここで, $[S]^e$ は剛性マトリックス, $[M]^e$ は質量マトリックスを表わす。式(10)のマトリックスの成分は,

$$\begin{aligned} & (S_{ij} - \lambda^2 M_{ij})^e \\ &= 2\pi \iint_S \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} - \lambda^2 N_i N_j \right) r dr dz \quad (11) \end{aligned}$$

と表わされる。

全領域に対してのマトリックス表示は,

$$([S] - \lambda^2 [M]) \{E_z\} = 0 \quad (12)$$

$[C] = [S] - \lambda^2 [M]$ とおけば

$$[C] \{E_z\} = 0 \quad (13)$$

式(13)は, 静電界の場合と同形となり, これはまた, 伝熱解析方程式とも同形である。従って, 上記のような変換をおこなうことにより, 伝熱解析のための有限要素法

のアルゴリズムを, そのまま使用することができる。

つぎに, 磁界についても, 電界の場合と同様に式の変

換を行なうことができる。磁界の回転方向成分 H_θ は, 式(2)により

$$\nabla^2 H_\theta + \lambda^2 H_\theta = 0 \quad (14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right) - \frac{H_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial z^2} + \lambda^2 H_\theta = 0 \quad (15)$$

と表わすことができ, 式(9)と同様に,

$$\begin{aligned} & 2\pi \iint_S \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial H_\theta}{\partial z} - \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right) N_i H_\theta \right\} r dr dz \\ & - 2\pi \int_L \left[N_i \frac{\partial H_\theta}{\partial r} r \right]_A^B dz - 2\pi \int_L \left[N_i \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right]_C^D r dr = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

上式の第2項, 第3項は, 外表面及び軸上での積分であり, $(\partial H_\theta / \partial r) = 0$, $(\partial H_\theta / \partial z) = 0$ であることから, 零となり, 式(16)は結局,

$$\begin{aligned} & 2\pi \iint_S \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial H_\theta}{\partial z} - \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right) N_i H_\theta \right\} r dr dz \\ &= 0 \quad (17) \end{aligned}$$

と表わされる。

式(10)の電界の場合と全く同様にマトリックス表示すれば,

$$([S]^e - \lambda^2 [M]^e) \{H_\theta\}^e = 0 \quad (18)$$

成分は,

$$\begin{aligned} & (S_{ij} - \lambda^2 M_{ij})^e \\ &= 2\pi \iint_S \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} - \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right) N_i N_j \right\} r dr dz \quad (19) \end{aligned}$$

全領域に対しても同様に,

$$([S] - \lambda^2 [M]) \{H_\theta\} = 0 \quad (20)$$

$$[C] \{H_\theta\} = 0 \quad (21)$$

となり, 電界と同様, 磁界 H_θ についても, 有限要素法を用いて求めることができる。

2.2 境界条件の決定方法

図1のような任意の形状で強制境界条件 (一般には, 成分で表わされる。)が未知の場合を考える。ここでは, 強制境界条件を, 周囲の節点で等価的に記述することを考える。点Pにおける法線を OP' とする。 $F = r H_\theta$ とおくと, 点Oにおける値は, 自然境界条件 $\partial F / \partial n = 0$ (n : 境界に垂直な方向成分)を満足し, 次式で表わされる。

$$F(I, J) = F_P = F(I, J+1) + m(F(I, J+1) - F(I-1, J+1)) \quad (22)$$

ただし, $m = \tan(\pi - \phi)$ である。

実際には, 節点を境界線上にとり, 点Pと点P'が,

かさなるように分割すれば、点Oにおける計算値を強制境界条件として点Pに代入し、計算を反復することによって、強制境界条件を等価的に考慮しつつ、電磁界分布を求めることができる。図2に、 TM_{010} 形空洞共振器を例にとったモデル図を示す。図3は、初期境界条件として、線形近似を用いて上述の手法により、反復計算した場合の電界の真値(TM_{010} モードでは、ベッセル関数)への収束の様子を示す。図3では、節点数100と1476の2例を考えているが、いずれも電界は軸上近傍から真値に収束し始め、周辺になるに従い、収束は遅くなることがわかる。図3から、節点数が少ない場合、ある程度の誤差レベルに達するまでの反復回数は少なくすむことがわかる。ただし、これ以上、反復回数を増やしても誤差はそれ程改善されない。一方、節点数が多い場合、反復回数を多くしても、収束の様子は、節点数が少ない場合に比べて遅くなっている。この原因は、図3からもわかるように、真値への収束は、軸近傍から順次周辺へと改善されていくため、節点数が増えると反復回数も多くとらねばならないことによる。ただし、十分、反復回数

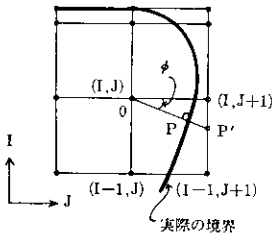


図1 任意の形状の境界条件

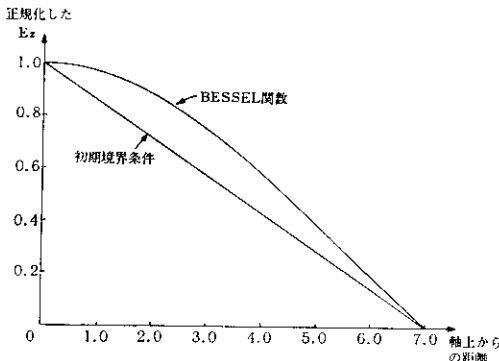
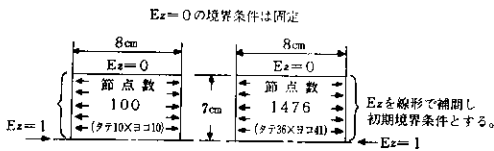


図2 境界条件の真値 (BESSEL 関数) と初期境界条件

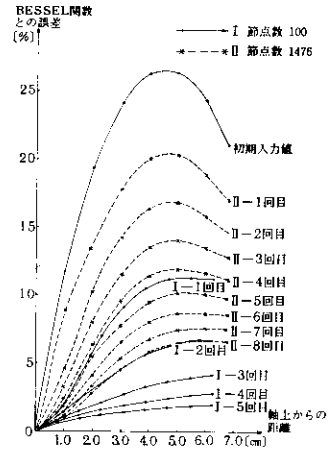


図3 反復法による境界条件の収束について

をとれば、節点数が多い程、最終的な精度は、よくなることが確かめられている。従って、精度をあげるためには、節点数を多くすると同時に、できるだけ真値に近いよい初期値で計算することが重要となる。

2.3 共振周波数の決定方法

任意の形状の空洞共振器中の高周波電磁界を求める場合、共振周波数は未知である。

マックスウェルの方程式より、

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (23)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (24)$$

ここで、 $\mathbf{i} = 0$ とする。

式(23)、(24)より、 ω は、

$$\omega = \frac{\mathbf{E}^* \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H}^* \text{rot } \mathbf{E}}{j\omega(\epsilon\mathbf{E}^*\mathbf{E} + \mu\mathbf{H}^*\mathbf{H})} \quad (25)$$

全領域においては、

$$\omega^2 = \frac{\int (\mathbf{E}^* \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H}^* \text{rot } \mathbf{E}) d\tau}{j \int (\epsilon\mathbf{E}^*\mathbf{E} + \mu\mathbf{H}^*\mathbf{H}) d\tau} \quad (26)$$

ここで、 $\mathbf{F} = r\mathbf{H}_\theta$ 、 $d\tau = 2\pi r dr d\theta dz$ とすれば、

$$\frac{\omega^2}{C^2} = \frac{\int \frac{1}{r^2} \left(\left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial F}{\partial r} \right|^2 \right) r dr dz}{\int \frac{1}{r^2} |F|^2 r dr dz} \quad (27)$$

となる。

実際に、共振周波数を求める場合、まず任意の初期周波数を仮定し、電磁界分布を求める。さらに、求めた電磁界分布を用いて、式(4)より共振周波数を求め、両者の比較により、新たな共振周波数を設定し、再度、電磁界分布を計算する。このような反復により、

〔設定共振周波数〕 \approx 〔式(4)による共振周波数〕

となったときに、正しい共振周波数及び電磁界分布が求まったことになる^{(4),(5)}。

2.4 高周波電磁界解析プログラムの構成

高周波電磁界解析プログラムの全体のフローチャートを図4に示す。大別して、入力部、解析部、出力部の3つの部分で構成されている。ここでは、本プログラムの特色である、マトリックス成分の記憶方法について述べておく⁽²⁾。

次数 ($m \times n$) のマトリックス A の成分を記憶させる最も簡単な方法は、二次元配列 $A (M, N)$ ($M=m$, $N=n$) を使い、マトリックス成分 a_{ij} を $A (I, J)$ の位置に記憶させる方法である。有限要素法では、マトリックス成分の内、半数以上は値が零となっている。この方法では、計算に不要な零成分をもすべて記憶するため、大きな記憶容量が必要である。実記憶で、できるだけ大きなマトリックスを扱うためには、効率のよい記憶

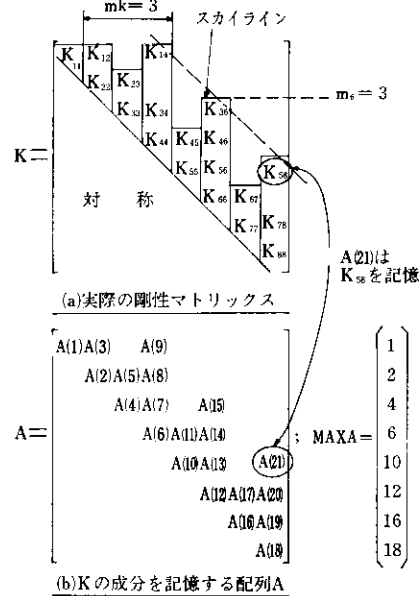


図5 剛性マトリックスの記憶方法

方法を用いなければならない。そこで、“DOT”では、剛性マトリックスのスカイラインより下の全成分、すなわち、対角成分を含む有効列を、連続的に一次元配列として記憶する方法を用いた。図5は、剛性マトリックス K の成分が、 A 中では、どの記憶場所を占めるかを示したものである。 A のほかに、 K の対角成分の A 中でのアドレスを記憶する配列 $MAXA$ も定義しておく。すなわち、 K の第 i 対角成分 k_{ii} の A 中でのアドレスは、 $MAXA(i)$ であり、 $(i-1)$ 番目までの列の高さの和に1を加えたものに等しいことがわかる。従って、 K の第 i 列の非零成分の数は、 $\{MAXA(i+1) - MAXA(i)\}$ に等しく、その成分のアドレスは、 $MAXA(i)$, $MAXA(i)+1$, $MAXA(i)+2$, …, $MAXA(i+1)-1$, である。

さて、“DOT”プログラムでは、式(1)の被積分関数の第2項までしか含まれていない。一方、高周波電磁界解析では、すでに述べたように、式(1)で第3項、すなわち、質量マトリックス M が新たに、現われてくる。本プログラムでは、プログラム中で質量マトリックス M を特に作成せず、直接、式(1)の $[C]$ マトリックスを作成した上で、“DOT”プログラムの剛性マトリックス K として用いることにより、記憶容量の節約と、マトリックス作成にともなう手続のわずらわしさを軽減し、計算の高速化を図っている。なお、“DOT”プログラムでは、剛性マトリックスの各要素は、非負と定義されて演算が実行されている。一方、本プログラムによる方法では、か

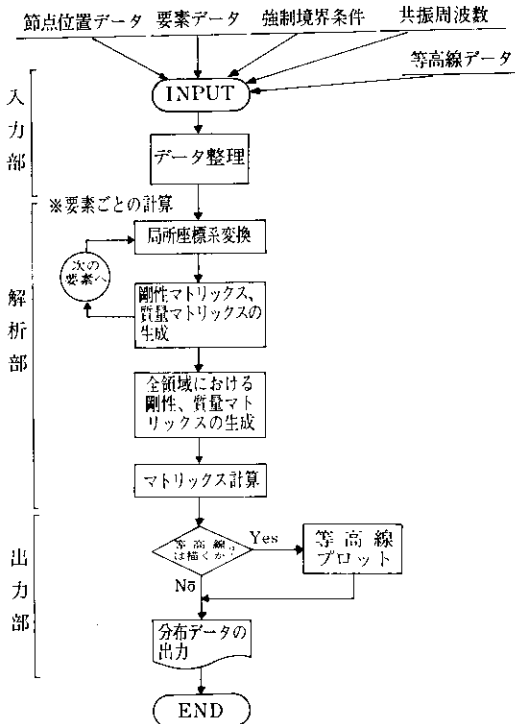


図4 高周波電界解析プログラムの流れ図

ならずしも、非負とは、かぎらないため、この制限条件をはずしている。さらに、本プログラムでは、“DOT”プログラムをできるだけ生かせるように、固有値は、いわゆる直交展開形ですべて求めるやり方は取らず、すでに述べたように、反復法を利用して、必要な固有値だけを求めるように簡便化している。

3. 有限要素法による高周波電磁界計算例

3.1 計算誤差の検討

図6に、 TM_{010} 形円筒空洞共振器の計算モデルを示した。 H_θ の分布は、次式のように、解析的に与えられる。

$$H_\theta = A J_0' \left(\frac{y_{01}}{a} r \right) \quad (29)$$

ここで、 A は磁界振幅、 $y_{01}=2.404825$ 、 $a=0.07(\text{m})$ 、 J_0' :第1種ベッセル関数の r に関する微分である。まず、フィールドの要素分割数の違いにより生じる誤差分

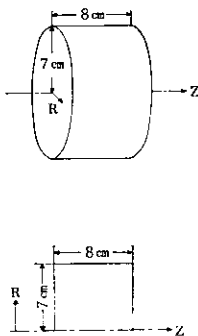


図6 計算モデルの形状

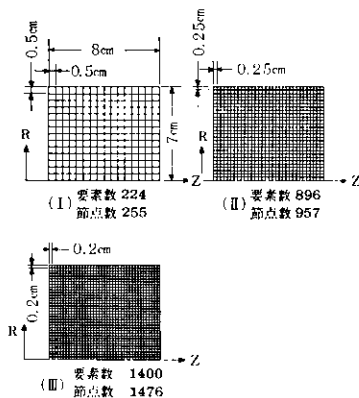


図7 フィールド内の要素分割

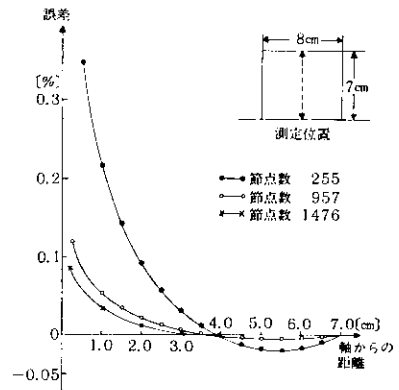


図8 円筒中心部での軸に垂直な方向の H_θ の分布に対する誤差分布

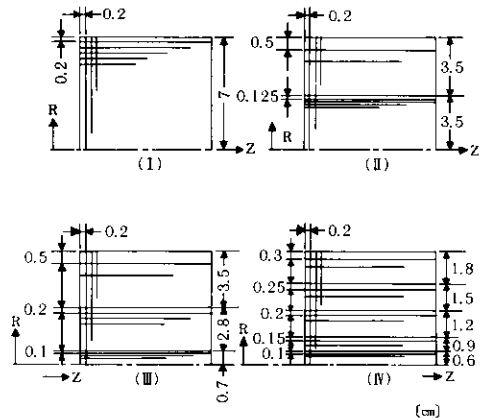


図9 4種類の要素分割例 (節点数 1476)

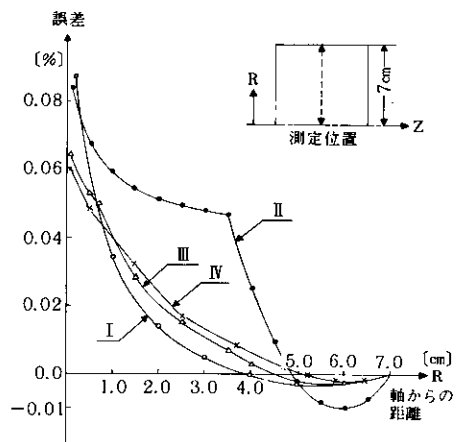


図10 要素分割方法の相異による誤差分布

布を検討するために、図7のように、分割数を3種類変化させた。この結果、有限要素法で得られた値と式(4)から得られた値を比較したものが図8である。これから明らかに、磁界分布の変化の激しい軸近傍の誤差が、最も大きく、要素分割を細かくすることにより、誤差を小さくすることができる。つぎに、図9のように、節点数を同じにとり、要素の分割方法を4種類変えた場合の誤差分布を検討した。結果を、図10に示した。これより、要素の分割方法により、誤差分布が異なってくるが、大きな要素を用いた領域での誤差の影響が細かい要素を用いた所にも出てくることがわかる。また、 r 方向に関しては、軸近傍($r=0$ 近傍)では、誤差が大きいことから、要素分割は基本的に軸近傍を細かくとる必要がある。図11は、節点数を変えた場合のフィールドの最大誤差の変化と各々の計算時間(CPU TIME)を示したものである。この例では、節点数が2000位までは、最大誤差は急激に小さくなっているが、それ以後は、あまり変化しない。それに対して、計算時間は逆に、急激に大きくなっていることから、許容誤差に応じて、節点数を選ぶことが重要である。なお、本プログラムによる計算時間は、従来の同種プログラムに比べて、5～6倍短くなっている。図12は、図11の例において、1要素当りのポテンシャル変化と誤差を示したものである。図12より、ポテンシャル変化率が大きい所で、誤差が大きいことがわかる。したがって、全フィールドを要素に分割する際、各要素内のポテンシャル変化率をある値以下に押えるように、何度か分割法を変えて計算する必要がある。

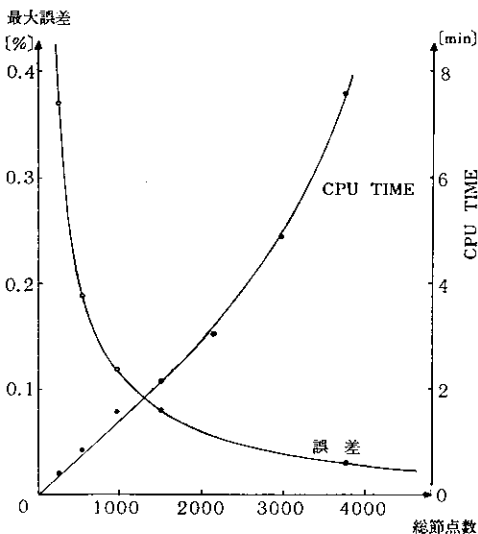


図11 節点数の変化に対する最大誤差及び CPU TIME

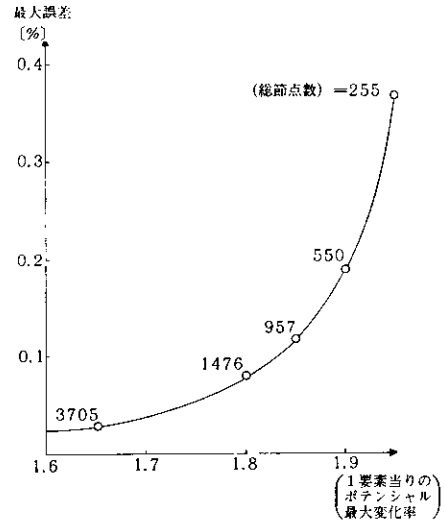


図12 1要素当りのポテンシャル最大変化率に対する誤差

る。

3.2 高周波電子レンズの光学特性の解析例

ここでは、光学特性の異なる2つの高周波電子レンズを組み合わせた複合レンズ系を考え、有限要素法を用いて電界分布を計算し、複合レンズ系の球面収差及び色収差についての検討を行なう。

図13に示す複合レンズ系の焦点距離(f)、球面収差(CS)、色収差(CC)は、それぞれ、

$$\frac{1}{f} = \frac{f_1 + f_2 - \varepsilon}{f_1 f_2} \quad (2)$$

$$CS = \frac{f_2^3 \cdot CS_1 + (\varepsilon - f_1)^2 f_1 \cdot CS_2}{(f_1 + f_2 - \varepsilon)^3} \quad (3)$$

$$CC = \frac{1}{\theta} (CC_1 \cdot f_2 + CC_2 \cdot f_1) \quad (4)$$

但し、 $\theta = f_1 + f_2 - \varepsilon$

となる。(導出については、参考文献(5)、(6)、(7)を参照。)

つぎに、複合レンズの実際の計算モデルを図14に示す。まず、第1、第2レンズ各々について、有限要素法

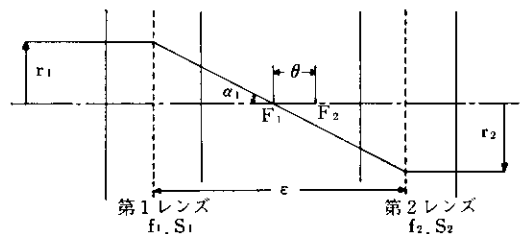


図13 複合レンズ系の軌道

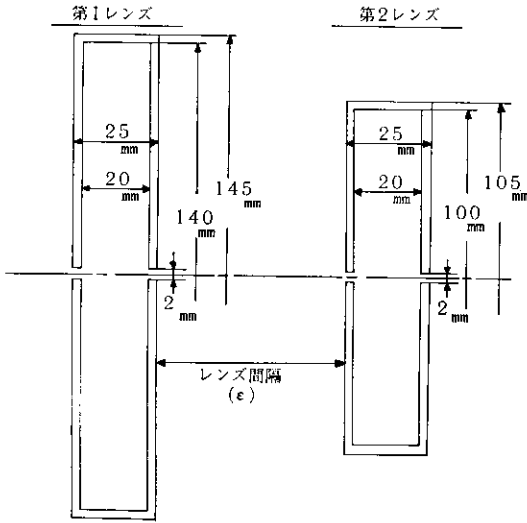


図14 複合レンズ系計算モデル

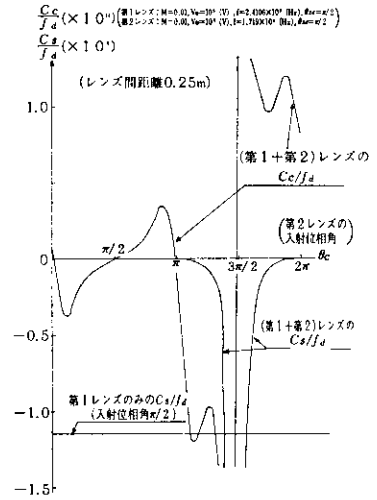


図16 複合レンズ系の収差係数

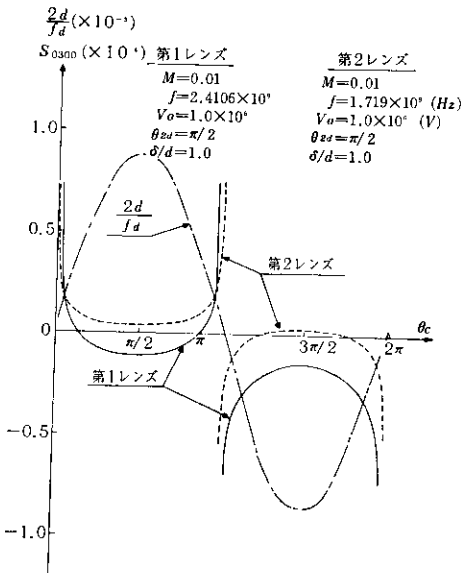


図15 第1レンズ及び第2レンズの球面収差と焦点距離

を用いて電界分布を求める。これを用いて、各々の各収差を計算する。図15に、各レンズの球面収差，焦点距離を示した。両レンズとも、正負の球面収差をもっていることがわかる。これを利用して、前述の複合レンズモデルに対する計算結果を図16に示す。但し、 $\epsilon = 0.25\text{ m}$ に

とって計算を行なった。球面収差については、入射位相角 $\left(\frac{3}{2}\right)\pi$ 付近をのぞいては、ほぼ補正されており、零に近い。一方、軸上色収差(S_{0101})についても、 $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 付近で零となる。したがって、このような動作条件で高周波電子レンズを用いると、球面収差ばかりでなく色収差も同時に打ち消すことができる。但し、実際に実用化するためには、このような動作条件で、球面及び色収差以外の諸収差が、どの程度の大きさになるか、検討する必要がある。これらの点については、現在、検討中である。最後に、本研究で用いた“DOT”プログラムの入手に際して、御助力いただいた日本精機株式会社春日正利氏に深謝する。

参考文献

- 1) 河野, 宅間, “数値電界計算法”, コロナ社
- 2) E. L. Wilson, “有限要素法の数値計算”, 科学技術出版社
- 3) O. C. Zienkiewicz, “マトリックス有限要素法”, 培風館
- 4) H. C. Hovt, D. D. Simmonds, “Computer Designed 805 MHz Protom Linac Cavities”, R. S. I. Vol. 37, No. 8 (1988)
- 5) L. C. Oldfield, “Computer Design of High Frequency Electron-Optical Systems”, 370-398, Microwave Cavities
- 6) J. Matsuda, K. Ura, “The aberration Theory of the Electron Trajectory in the R-F Fields. Part I. The Second Order aberration.”, Optick, 40, 2, 178, (1974)
- 7) 松田, 襄, “色収差補正用高周波電子レンズの解析”(1976) 電子通信学会